

VII Predavanje - zadaci

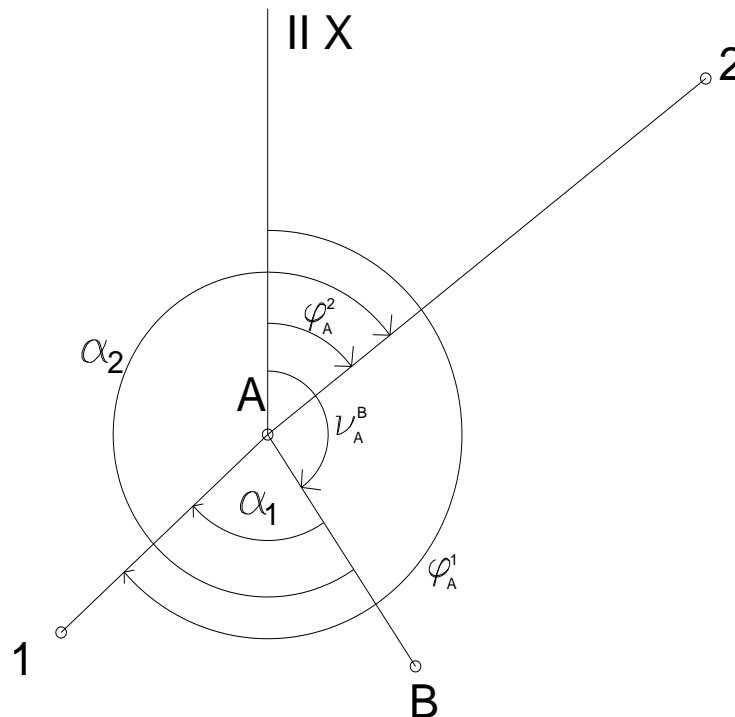
1. Date su koordinate tačaka A i B. Tačka A je služila kao stanica, tačka B kao orijentaciona tačka. Na terenu su mjereni horizontalni uglovi i horizontalne dužine prema tačkama 1 i 2. Pomoću zadatih veličina napraviti skicu i sračunati koordinate nepoznatih tačaka 1 i 2 određenih polarnom metodom.

Dati elementi:

$$D_{A-1} = 26.24m, D_{A-2} = 51.99m, \alpha_1 = 81^\circ 28' 42'' \text{ i } \alpha_2 = 266^\circ 06' 47''.$$

Tačka	Y (m)	X (m)
A	32.79	71.91
B	85.78	12.08

Približna skica:



Napomena: Vrijednosti mjenih uglova uvijek se nanose od pravca ka orijentacionoj tački u smjeru kazaljke na časovniku.

Iz razlike koordinata računa se direkcionni ugao po formuli:

$$\nu_A^B = \arctg \left| \frac{\Delta X}{\Delta Y} \right| + 90^\circ$$

$$\Delta X = X_B - X_A = 12.08m - 71.91m = -59.83m$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A = 85.78m - 32.79m = 52.99m$$

odakle je:

$$\nu_A^B = \arctg \left| \frac{-59.83}{52.99} \right| + 90^\circ = 138^\circ 28' 10''$$

Zatim se računaju orijentisani pravci ka nepoznatim tačkama po formulama:

$$\varphi_A^1 = \nu_A^B + \alpha_1 \quad \varphi_A^2 = \nu_A^B + \alpha_2.$$

Iz vrijednosti sračunatog direkcionog ugla i mjerenih horizontalnih uglova dobijaju se vrijednosti za orijentisane pravce:

$$\varphi_A^1 = 138^\circ 28' 10'' + 81^\circ 28' 42'' = 219^\circ 56' 52''$$

$$\varphi_A^2 = 138^\circ 28' 10'' + 266^\circ 06' 47'' = 404^\circ 34' 57'' (-360^\circ) = 44^\circ 34' 57''$$

Odgovarajuće koordinatne razlike se računaju po opštim formulama:

$$\Delta Y_i^j = D_{i-j} \sin \varphi_i^j \quad \Delta X_i^j = D_{i-j} \cos \varphi_i^j.$$

Uvrstivši sračunate vrijednosti dobijaju se sledeće koordinatne razlike:

$$\Delta Y_A^1 = 26.24m * \sin 219^\circ 56' 52'' = -16.85m$$

$$\Delta X_A^1 = 26.24m * \cos 219^\circ 56' 52'' = -20.12m$$

$$\Delta Y_A^2 = 51.99m * \sin 44^\circ 34' 57'' = 36.49m$$

$$\Delta X_A^2 = 51.99m * \cos 44^\circ 34' 57'' = 37.03m$$

Sračunate vrijednosti koordinatnih razlika se dodaju na koordinate stanice i tako se dobijaju se koordinate nepoznatih tačaka po formulama:

$$Y_1 = Y_A + \Delta Y_{A-1} = 32.79m + (-16.85m) = 15.94m$$

$$X_1 = X_A + \Delta X_{A-1} = 71.91m + (-20.12m) = 51.79m$$

$$Y_2 = Y_A + \Delta Y_{A-2} = 32.79m + 36.49m = 69.28m$$

$$X_2 = X_A + \Delta X_{A-2} = 71.91m + 37.03m = 108.94m$$

2. Date su koordinate tačkaka A i B. Na terenu su mjereni horizontalni uglovi i horizontalne dužine u trouglovima 1 ($\Delta A1B$) i 2 ($\Delta A21$) koji su naznačeni na datoj skici. Na osnovu skice i pomoću zadatih veličina sračunati preostale elemente u trouglovima 1 i 2 pomoću sinusne i kosinusne teoreme kao i koordinate nepoznatih tačkaka 1 i 2.

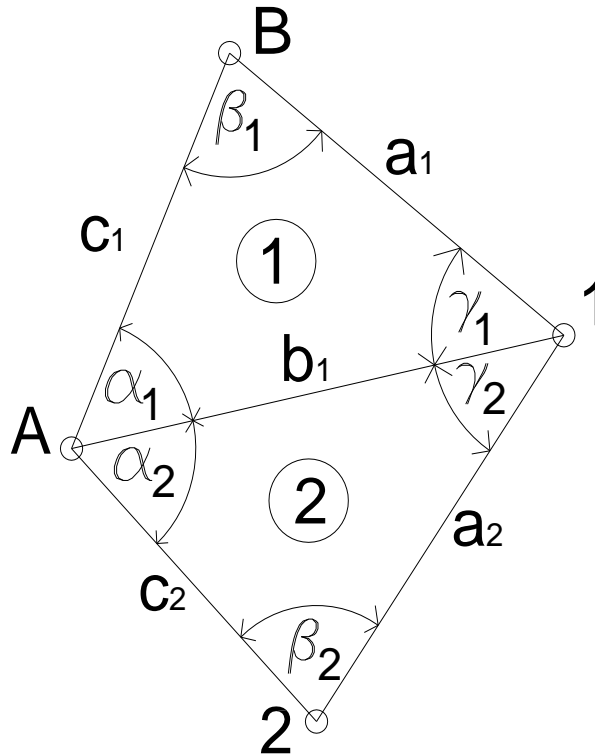
Mjerene veličine:

$$a_1 = 19.29\text{ m}, c_2 = 16.06\text{ m}, \alpha_1 = 54^\circ 51' 24'' \text{ i } \alpha_2 = 59^\circ 00' 04''$$

Koordinate tačkaka A i B:

Tačka	Y (m)	X (m)
A	91.12	114.04
B	98.23	130.96

Približna skica:



U prvom dijelu zadatka treba odrediti sve nepoznate elemente u trouglovima 1 i 2. U trouglu 1 to su dužine c_1 i b_1 i uglovi β_1 i γ_1 a u trouglu 2 kada već sračunamo dužinu b_1 iz trougla 1, preostaju dužina a_2 i uglovi γ_2 i β_2 .

Dužina c_1 iz trougla 1, može se sračunati iz zadatih koordinata tačkaka A i B preko Pitagorine teoreme po formuli:

$$c_1 = \sqrt{\Delta X_{A-B}^2 + \Delta Y_{A-B}^2}$$

gdje je:

$$\Delta X = X_B - X_A = 130.96m - 114.04m = 16.92m$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A = 98.23m - 91.12m = 7.11m$$

Uvrstivši date vrijednosti dobija se:

$$C_1 = \sqrt{16.92m^2 + 7.11m^2} = 18.35m$$

Ugao γ_1 se dobija iz sinusne teoreme koja za trougao 1 glasi:

$$\frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{b_1}{\sin \beta_1} = \frac{c_1}{\sin \gamma_1} = k$$

odakle je:

$$\gamma_1 = \arcsin \frac{c_1 * \sin \alpha_1}{a_1} = \arcsin \frac{18.35 * \sin 54^\circ 51' 24''}{19.29} = 51^\circ 03' 57''$$

Ugao β_1 se izračunava iz uslova da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu 180° po formuli:

$$\beta_1 = 180^\circ - \alpha_1 - \gamma_1 = 180^\circ - 54^\circ 51' 24'' - 51^\circ 03' 57'' = 74^\circ 04' 39''$$

Dužina b_1 u trouglu se takođe izračunava iz uslova sinusne teoreme:

$$\frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{b_1}{\sin \beta_1} = \frac{c_1}{\sin \gamma_1} = k$$

odakle je:

$$b_1 = \frac{c_1 \sin \beta_1}{\sin \gamma_1} = \frac{18.35 * \sin 74^\circ 04' 39''}{\sin 51^\circ 03' 57''} = 22.69m$$

Zatim se računaju elementi trougla 2. Stranica b_1 je zajednička pa joj je već poznata vrijednost iz trougla 1 a uz nju su poznate vrijednosti stranice c_2 i ugla α_2 . Kada su poznate dvije stranice i ugao između njih, treća stranica se računa po formuli kosinusne teoreme koja za trougao 2 glasi:

$$a_2^2 = b_1^2 + c_2^2 - 2b_1c_2 \cos \alpha_2$$

odakle je:

$$a_2 = \sqrt{b_1^2 + c_2^2 - 2b_1c_2 \cos \alpha_2} = \sqrt{22.69^2 + 16.06^2 - 2 * 22.69 * 16.06 * \cos 59^\circ 00' 04''}$$

$$a_2 = 19.94m$$

Zatim se računa ugao β_2 iz uslova sinusne teoreme u trouglu 2:

$$\frac{b_1}{\sin \beta_2} = \frac{a_2}{\sin \alpha_2} = \frac{c_2}{\sin \gamma_2} = k$$

odakle je:

$$\beta_2 = \arcsin \frac{b_1 \sin \alpha_2}{a_2} = \arcsin \frac{22.69 * \sin 59^\circ 00' 04''}{19.94} = 77^\circ 15' 48''$$

Ugao γ_2 se računa iz uslova da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu 180° po formuli:

$$\gamma_2 = 180^\circ - \beta_2 - \alpha_2 = 180^\circ - 77^\circ 15' 48'' - 59^\circ 00' 04'' = 43^\circ 44' 08''.$$

U drugom dijelu zadatka treba sračunati koordinata nepoznatih tačaka 1 i 2.

Da bi se sračunale koordinate nepoznatih tačaka treba sračunati prvo vrijednosti orijentisanih pravaca ka njim. Orijetisani pravci se dobijaju sabiranjem mjenenog i direkcionog ugla pa prvo treba sračunati direkcionu ugao između tačaka A i B:

$$v_A^B = \arctg \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|$$

Gdje je:

$$\Delta X = X_B - X_A = 130.96m - 114.04m = 16.92m$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A = 98.23m - 91.12m = 7.11m$$

Za direkcionu ugao se dobija vrijednost:

$$v_A^B = \arctg \frac{7.11}{16.92} = 22^\circ 47' 34''$$

Orijentisani pravci od tačke A ka tačkama 1 i 2 se računaju po formulama:

$$\varphi_A^1 = v_A^B + \alpha_1 = 22^\circ 47' 34'' + 54^\circ 51' 24'' = 77^\circ 38' 58''$$

$$\varphi_A^2 = v_A^B + \alpha_1 + \alpha_2 = \varphi_A^1 + \alpha_2 = 77^\circ 38' 58'' + 59^\circ 00' 04'' = 136^\circ 39' 02''$$

Odgovarajuće koordinatne razlike se računaju po opštim formulama:

$$\Delta Y_i^j = D_{i-j} \sin \varphi_i^j$$

$$\Delta X_i^j = D_{i-j} \cos \varphi_i^j$$

Uvrstivši odgovarajuće vrijednosti dobijaju se sledeće koordinatne razlike:

$$\Delta Y_A^1 = b_1 * \sin \varphi_A^1 = 22.69 * \sin 77^\circ 38' 58'' = 22.16 m$$

$$\Delta X_A^1 = b_1 \cos \varphi_A^1 = 22.69 * \cos 77^\circ 38' 58'' = 4.85 m$$

$$\Delta Y_A^2 = c_2 * \sin \varphi_A^2 = 16.06 * \sin 136^\circ 39' 02'' = 11.02 m$$

$$\Delta X_A^2 = c_2 * \cos \varphi_A^2 = 16.06 * \cos 136^\circ 39' 02'' = -11.68 m$$

Dobijene vrijednosti koordinatnih razlika se dodaju na koordinate stanice pa se tako dobijaju i koordinate nepoznatih tačaka:

$$Y_1 = Y_A + \Delta Y_{A-1} = 91.12m + 22.16m = 113.28m$$

$$X_1 = X_A + \Delta X_{A-1} = 114.04m + 4.85m = 118.89m$$

$$Y_2 = Y_A + \Delta Y_{A-2} = 91.12m + 11.02m = 102.14m$$

$$X_2 = X_A + \Delta X_{A-2} = 114.04m + (-11.68m) = 102.36m$$